Mathe II - Analysis

1. Logik, Mengen, ~~Funktionen~~ komplexe Zahlen

1.1 Logik

Math. Aussagen haben genau einen von 2 Wahrheitswerten, wahr oder falsch.

A - Aussage, $w(A) = 0 \;:\Leftrightarrow\; A$ falsch
$w(A) = 1 \;:\Leftrightarrow\; A$ wahr

$A: \; 2 = 1, \; w(A) = 0$

$A: \; 2 > 1, \; w(A) = 1$

$\neg A$ „nicht A" (Negation)

$A \wedge B$ „A und B" (Konjunktion)

$A \vee B$ „A oder B" (Disjunktion)

$A \Rightarrow B$ „aus A folgt B" (Implikation)

$A \Leftrightarrow B$ „A äquivalent zu B" (Äquivalenz)

Das wird definiert durch Wahrheitswertetafeln

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1 } !	0
0	0	1	0	0	1	1

Weitere Beziehungen:

$$\underbrace{(A \Rightarrow B)}_{\text{„direkter Beweis"}} \Leftrightarrow \underbrace{(\neg B \Rightarrow \neg A)}_{\text{„indirekter Beweis"}}$$

<u>Bspl</u>: Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt: $\underbrace{n \text{ gerade}}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{n^2 \text{ gerade}}_{B}$

$$\left[\begin{array}{l} \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\} \\ \mathbb{N}_+ := \{1, 2, \dots\} \end{array}\right]$$

<u>Beweis</u>: (i) „$\Rightarrow$" (direkt)

$$\begin{aligned} n \text{ gerade} &\Rightarrow n = 2 \cdot k \quad , k \in \mathbb{N}_{>0} \\ &\Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2) \\ &\Rightarrow n^2 \text{ gerade} \end{aligned}$$

(ii) „$\Leftarrow$" (indirekt) $\quad ((B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B))$

sei n ungerade $\Rightarrow n = 2k - 1 \Rightarrow n^2 = (2k-1)^2$
$(\neg A)$

$$\begin{aligned} &= 4k^2 - 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 - 2k) + 1 \\ &\Rightarrow n^2 \text{ ungerade } (\neg B) \end{aligned}$$

■

<u>Regeln von de Morgan</u>:

$$\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg (A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

usw.

Wir benutzen Quantoren:

$\forall x : A(x) \quad :\Leftrightarrow$ Für alle x ist $A(x)$ wahr

$\exists x : A(x) \quad :\Leftrightarrow$ Es gibt (wenigstens) ein x, so dass $A(x)$ wahr ist

$\exists_1 x : A(x) \quad :\Leftrightarrow$ Es gibt genau ein x, so dass $A(x)$ wahr ist.

[Radio: es kommt ihnen ein Auto entgegen...]

Negation: $\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow (\forall x : \neg A(x))$

$\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow (\exists x : \neg A(x))$

1.2. Mengen

M Menge, $a \in M \quad :\Leftrightarrow$ a ist Element von M

$a \notin M \quad :\Leftrightarrow \neg(a \in M)$

$M \subset N \quad :\Leftrightarrow \forall x : (x \in M \Rightarrow x \in N)$

$\emptyset$ = leere Menge

$M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$ Vereinigung

$M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$ Durchschnitt

$M \setminus N := \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$ Differenz

$M \times N := \{(a,b) \mid a \in M \wedge b \in N\}$ Cartesisches Produkt

$\mathcal{P}(M) := \{X \mid X \subset M\}$ Potenzmenge

Superwichtige Mengen:

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ natürliche Zahlen

$\mathbb{N}_+ := \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ganze Zahlen

$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_+\}$ rationale Zahlen (Quotient)

$\mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup \{x \mid x \text{ ist irrational}\}$ reelle Zahlen

Irrationale Zahlen: $\pi, e, \sqrt{2}, \ldots$

Es gibt „viel mehr" irrationale Zahlen als rationale!!

$\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}$ sind abzählbar unendlich

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar unendlich

(gr. Übung?)

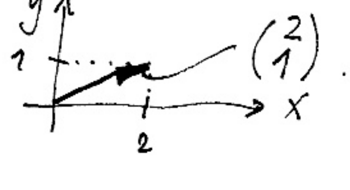
Wir akzeptieren $\mathbb{R}$ als „Gottgegeben"!

$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die euklidische Ebene

(Euklid von Alexandrien, ca. 300 v. Chr.)

$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$ der n-dim. euklidische Raum

Im $\mathbb{R}^n$ leben die Vektoren, z.B. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$



Intervalle: $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a<b$:

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ abgeschlossenes Int.

$]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes Intervall

$$\left.\begin{array}{l}]a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} \\ {[a,b[} := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\} \end{array}\right\} \text{ halboffene Intervalle}$$

$$\left.\begin{array}{l} {[a,\infty[} := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < \infty\} \\ ]-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \le b\} \end{array}\right\} \text{ halbunendliche Intervalle}$$

$]a,\infty[$, $]-\infty,b[$ analog

$]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$ (Achtung: $\infty \notin \mathbb{R}$!)

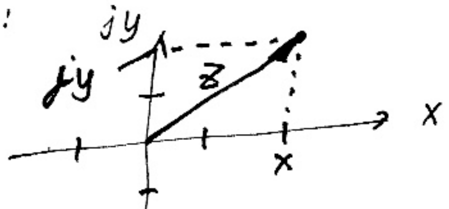
→ 5a
← 5c

Die Gleichung $x^2+1=0$ hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung!

Abhilfe: komplexe Zahlen

$$\mathbb{C} := \{x + jy \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge j^2 = -1\}$$

Darstellung als Zeiger (Vektoren) in der Gauß'schen Zahlenebene:



$x = Re(z)$ Realteil
$y = Im(z)$ Imaginärteil

→ Enorme Bedeutung in der E-Technik!

Deshalb machen wir das jetzt gleich!

1.3 Komplexe Zahlen

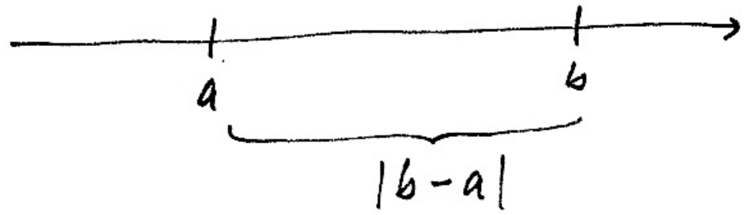
$\sqrt{-a}$, $a \in \mathbb{R}$, $a>0$, existiert in $\mathbb{R}$ nicht.

Wir führen die imaginäre Einheit $j := \sqrt{-1}$ ein.

Zu $a \in \mathbb{R}$ heißt

$$|a| := \begin{cases} a & ; \ a \geq 0 \\ -a & ; \ a < 0 \end{cases}$$

der <u>Betrag</u> von a.



<u>Eigenschaften</u>:

(1) $|a| \geq 0$

(2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(3) $|ab| = |a| \cdot |b|$

(4) $|a+b| \leq |a| + |b|$ <u>Dreiecksungleichung</u>

Wichtige Beweistechnik: <u>Vollständige Induktion</u>

– wenn Aussage von $n \in \mathbb{N}$ abhängt, $A(n)$

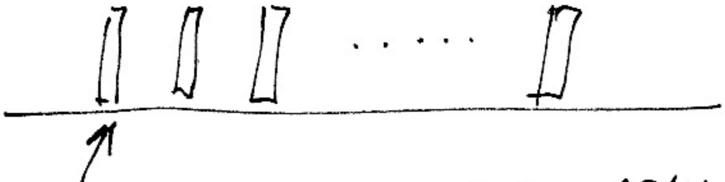
<u>Bspl</u>: C.F. Gauß (1777–1855)

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n \overset{!}{=} \frac{1}{2} n(n+1)$$

Rumprobieren: $n=1$: $1 \overset{!}{=} \frac{1}{2} 1(2) = 1$ ✓

$n=3$: $1+2+3 = 6 \overset{!}{=} \frac{1}{2} 3(3+1) = 6$ ✓

Allg. Beweisprinzip: Japan. Domino-Olympiade



wenn der erste Stein fällt,

und

wenn an beliebiger Stelle n mit Stein n auch Stein n+1 fällt,

dann fallen alle Steine um.

D.i. vollst. Induktion:

1). Induktionsanfang

Zeige, dass $A(1)$ richtig ist

2). Induktionsannahme

$A(n)$ ist richtig

Dann zeige

Induktionsschritt

$A(n+1)$ ist richtig

Bspl: Gauß

$$A(n): \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

1). $A(1)$ ist richtig ✓

2). Ind. annahme: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$ stimmt

Ind. schritt: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{= \frac{1}{2} n(n+1)} + n+1 =$ (d.i. die Ind.-annahme)

$$= \frac{1}{2} n(n+1) + n+1 = (n+1)\left(\frac{1}{2}n + 1\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{1}{2}n + \frac{2}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)\cdot(n+2) \quad : A(n+1) \qquad \blacksquare$$

$\longrightarrow$ zurück nach (B)

Berechne „Binome": $(a+b)^0 = 1$

$$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1\, b$$
$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$$
$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3 \cdot ab^2 + 1\, b^3$$
$$\vdots$$

gibt es ein Muster?

→ Pascal'sches Dreieck:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \leftarrow \text{hoch } 0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \leftarrow \text{hoch } 1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \leftarrow \text{hoch } 2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \leftarrow \text{hoch } 3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \leftarrow \text{hoch } 4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \leftarrow \text{hoch } 5 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Das sind die Binomialkoeffizienten — $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $0! := 1$ „Fakultät"

$$\boxed{\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \quad , \; 0 \le m \le n}$$

Vollst. Ind. zeigt den binomischen Lehrsatz

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

$\longrightarrow$ zurück zu (5)

[Achtung: „$\sqrt{}$" kann nicht die reelle Wurzelfktn. sein, aber: scheiß drauf!]

Dann erweitern wir die reellen Zahlen zu den <u>komplexen Zahlen</u> $z = x + jy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Jetzt rechnen: $z_1 = x_1 + jy_1$, $z_2 = x_2 + jy_2$

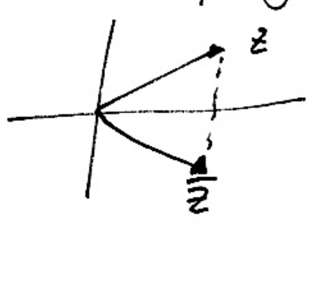
Addition: $z_1 + z_2 = x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2$
$= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$ ✓

Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2)$
$= x_1x_2 + jx_1y_2 + jx_2y_1 + \underbrace{j^2}_{-1} y_1y_2$
$= (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$ ✓

Division $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = ?$

Trick: zu $z = x + jy$ heißt $\bar{z} := x - jy$ die <u>komplex konjugierte</u> komplexe Zahl.

Geometrisch: Spiegelung an reeller Achse



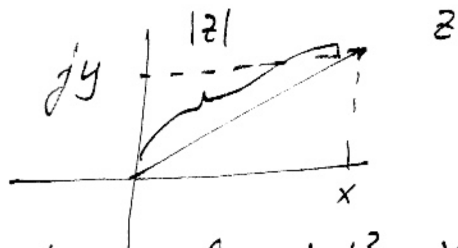
Jetzt $\frac{z_1}{z_2}$ erweitern mit $\overline{z_2}$!

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

$$z_2 \cdot \overline{z_2} = (x_2 + jy_2) \cdot (x_2 - jy_2)$$
$$= (x_2^2 - jx_2y_2 + jx_2y_2 - \underbrace{j^2}_{-1} y_2^2)$$
$$= (x_2^2 + y_2^2)$$

Yeah! $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$

und noch mehr:



Pythagoras: $|z|^2 = x^2 + y^2$,

also $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$!

Damit: Division $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 - jy_2)}{x_2^2 + y_2^2}$

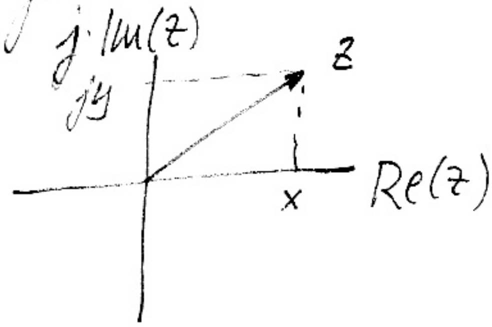
$$= \frac{x_1x_2 - jx_1y_2 + jx_2y_1 - j^2 y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

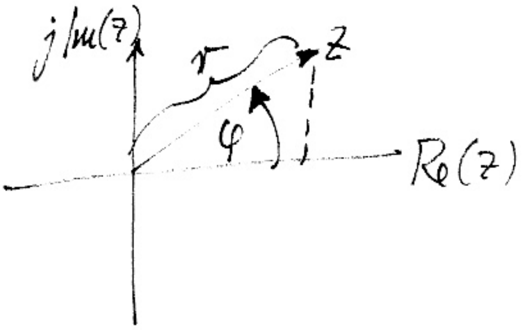
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \in \mathbb{C} \quad ✓$$

Wir können in $\mathbb{C}$ addieren, multiplizieren und dividieren, und den Betrag $|z|$ ausrechnen (Länge des Zeigers).

Geht da noch mehr? → Jaaa!



$\boxed{z = x + jy}$ „cartesische Form" (René Descartes)



$\sin\varphi = \frac{y}{r}$, $\cos\varphi = \frac{x}{r}$

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$\Rightarrow \boxed{z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)}$, $r = |z|$

„Polarform"

Leonhard Euler: $\boxed{\sin x := \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots}$ (1.3.1)

$! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist die Fakultätsfunktion

$0! := 1, \quad n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

also $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, usw.

(1.3.2) $\boxed{\cos x := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots}$ Das sind die Potenzreihen für sin und cos.

(1.3.3) $\boxed{e^x := 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}$ Die Exponentialfktn.

Damit:

$$e^{j\varphi} = 1 + \frac{j\varphi}{1!} + \frac{(j\varphi)^2}{2!} + \frac{(j\varphi)^3}{3!} + \frac{(j\varphi)^4}{4!} + \frac{(j\varphi)^5}{5!} + \dots$$

$$j^2 = -1$$
$$j^3 = -j$$
$$j^4 = 1$$
$$j^5 = j$$
$$\vdots$$

usw.

also:

$$e^{j\varphi} = 1 + j\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - j\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + j\frac{\varphi^5}{5!} \mp \dots$$

$$= \underbrace{1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} \mp \dots}_{\cos\varphi} + j\underbrace{\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} \mp \dots\right)}_{\sin\varphi}$$

$$\cos\varphi \quad + j \quad \sin\varphi$$

!

$$\Rightarrow \boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi} \quad \text{Eulersche Formel} \quad (1.3.4)$$

[$\varphi = \pi \Rightarrow e^{j\pi} = -1$
„schönste Formel der Mathematik"]

Also ist die Polarform von z:

$$\boxed{z = re^{j\varphi} = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)} \qquad (1.3.5)$$

Jetzt können wir richtig rumsauen!

Potenzieren:

$$z^n = r^n (e^{j\varphi})^n = r^n e^{jn\varphi} = r^n(\cos n\varphi + j \sin n\varphi)$$

„Formel von Moivre" (1.3.6)

Wurzelziehen:

$$z^n = a = a_0 \cdot e^{j\alpha} \quad , a_0 > 0$$

Ansatz: $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r \cdot e^{j\varphi}$

Dann $z^n = r^n \cdot e^{jn\varphi} = a_0 \cdot e^{j\alpha}$

$$\Rightarrow \quad a_0 = r^n \,, \quad \alpha = n\varphi,$$

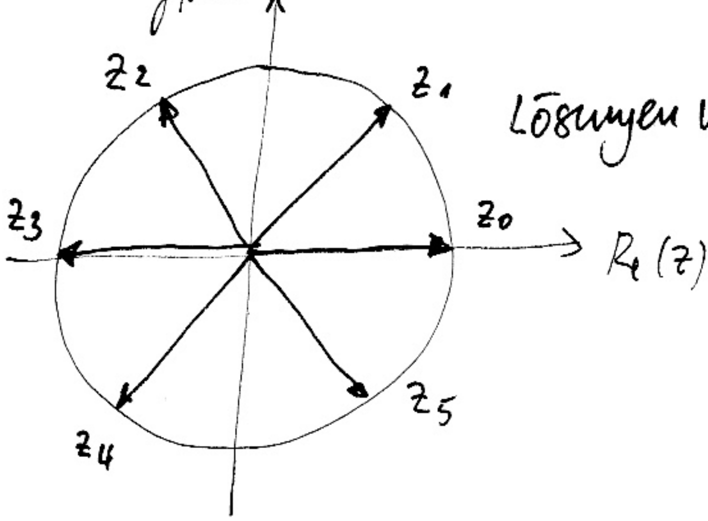
<u>aber</u>: $e^{j\varphi}$ ist 2π-periodisch !!!

$$e^{j\varphi} = e^{j(\varphi + k\cdot 2\pi)} \quad , k \in \mathbb{Z}$$

Damit: $n\varphi = \alpha + k \cdot 2\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\alpha + k\cdot 2\pi}{n}$

$\Rightarrow$ Es gibt genau n Wurzeln von $a = a_0 \cdot e^{j\alpha}$

$$\boxed{z_n = \sqrt[n]{a_0}\, e^{j\frac{(\alpha + k\cdot 2\pi)}{n}} \quad , k = 0, 1, 2, \dots, n-1} \quad (1.3.7)$$



Lösungen von $z^6 = 1$ (6te Einheitswurzeln)

$\Rightarrow$ Hauptsatz der Algebra:

Jedes Polynom $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen.

$$x^3 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^3 = -2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-2} =$$

$$x^3 = 2 \cdot e^{j\pi} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \cdot e^{j\frac{\pi + k\cdot 2\pi}{3}},$$

$$k = 0, 1, 2$$

$$x_0 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x_1 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{j\frac{3\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\pi + j\sin\pi\right)$$

$$x_2 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{j\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + j\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

Winkel umrechnen:

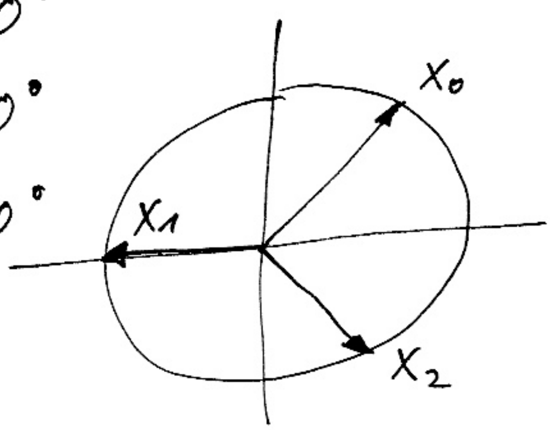
$$360° \mathrel{\hat{=}} 2\pi$$

$$1° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{180} \quad ; \quad \frac{360°}{2\pi} = 1 = \frac{180°}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3} \mathrel{\hat{=}} \frac{180°}{3} = 60°$$

$$\pi \mathrel{\hat{=}} 180°$$

$$\frac{5\pi}{3} \mathrel{\hat{=}} 5 \cdot 60° = 300°$$



Noch mal zurück: $z_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{j\varphi_2}$

Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$

Division: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$

$\longrightarrow$ Geometrische Interpretation!

2. Reelle Funktionen

$$f : \underbrace{D}_{\text{Definitionsbereich (Menge)}} \to \underbrace{Z}_{\text{Zielbereich (Menge)}}$$

ist <u>Funktion</u>, wenn jedem $x \in D$ genau ein $y = f(x) \in Z$ zugeordnet wird.

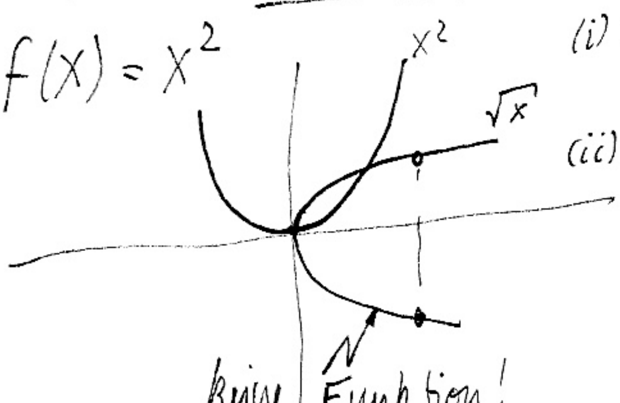
Für $A \subset D$ heißt $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$ das <u>Bild</u> von A.

Für $B \subset Z$ heißt $f^{-1}(B) := \{x \in D \mid f(x) = B\}$ das <u>Urbild</u> von B.

$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subset D \times Z$ heißt der <u>Graph</u> von f.

Wann ex. zu f eine <u>Umkehrfunktion</u>?

<u>Bspl</u>: $y = f(x) = x^2$



<u>keine</u> Funktion!

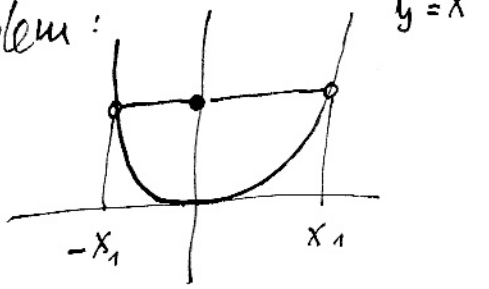
(i) x u. y vertauschen: $x = y^2$

(ii) nach y auflösen: $y = \sqrt{x}$

ist Umkehrfktn von $f(x) = x^2$

$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$

Problem:



$x_1 \neq -x_1$, aber $f(x_1) = f(-x_1)$!

$f: D \to Z$ heißt <u>injektiv</u>, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in D: \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (2.1)$$

[Umkehrung: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$]

Nur injektive Fktn. sind invertierbar!

f heißt <u>surjektiv</u>, wenn alle $y \in Z$ als Bilder von f auftauchen. (2.2)

f heißt <u>bijektiv</u>, wenn injektiv und surjektiv. (2.3)

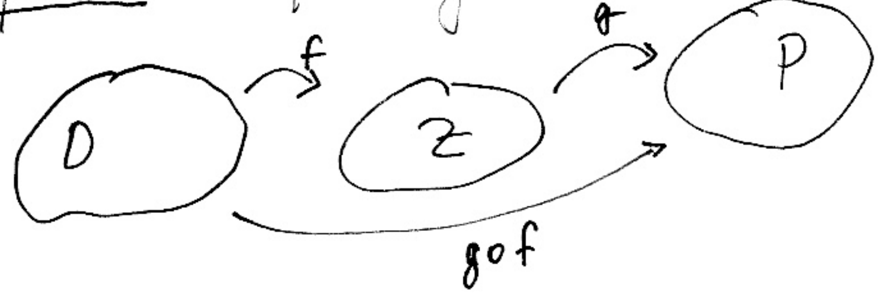
Dann gilt:

$$D \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Z .$$

Für $f: D \to Z$, $g: Z \to P$ heißt

$$g \circ f(x) := g(f(x)) \quad \text{„}g \text{ nach } f\text{"} \quad (2.4)$$

die <u>Komposition</u> von f und g.



Erster Blick auf elementare Funktionen

(a) Lineare Funktion

$f: D \to Z$ heißt linear, wenn

(2.5) $$\boxed{\forall x, y \in D \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)}$$

Für $D \subset \mathbb{R}$, $Z \subset \mathbb{R}$ sind

$$f(x) := a \cdot x, \quad a \in \mathbb{R}$$

die linearen Fktnen. (Es muß $f(0) = 0$ gelten, daher ist das lineare Polynom $f(x) = ax + b$ für $b \neq 0$ keine lineare Fktn.!

(b) $f(x) = ax + b$, $b \neq 0$, heißt affin-linear.

(c) $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$

Polynom vom Grad n.

(d) Exponentialfktn.

$$y = f(x) = a^x \quad , \ a > 0 \text{ „Basis"}$$

Funktionalgleichung: $$\boxed{a^{x+y} = a^x \cdot a^y} \quad (2.6)$$

$$\exists_1 e \in \mathbb{R} : f(x) = e^x \text{ und } f'(x) = f(x)$$

$$f'(0) = 1$$

Das ist die Euler'sche Zahl.

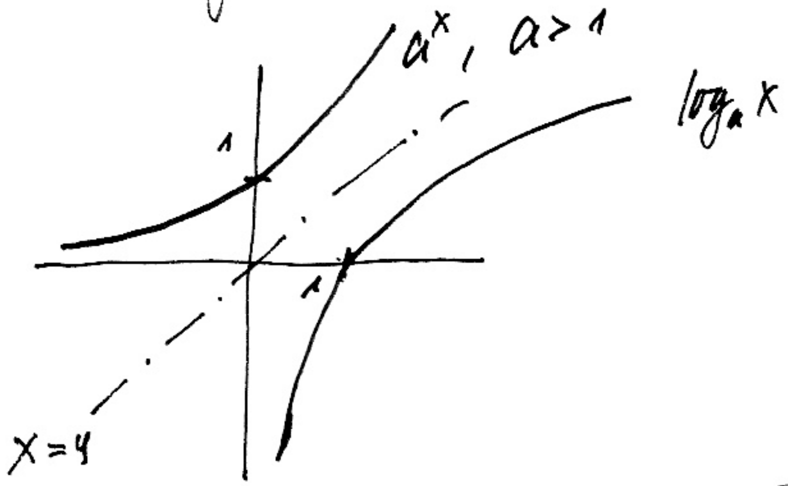
$$e = 2{,}718281828 45\ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots$$

(e) Logarithmus

$y = \log_a x \quad , a > 0, \ a \neq 1$ „Basis"

ist Umkehrfunktion von $y = a^x$.



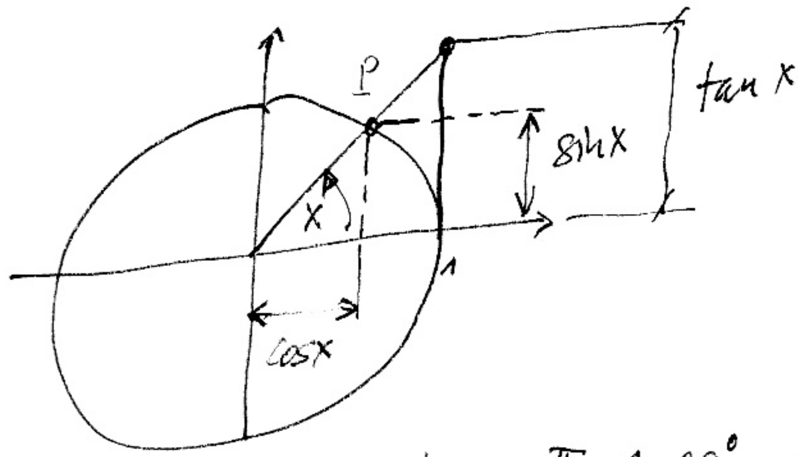
Funktionalgl.: $\boxed{\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y}$ (2.7)

Wichtig: $\boxed{\log_e x = \ln x}$ „natürlicher Log."

$\log_{10} x$ „dekadischer Log.", „Briggs'scher Log."

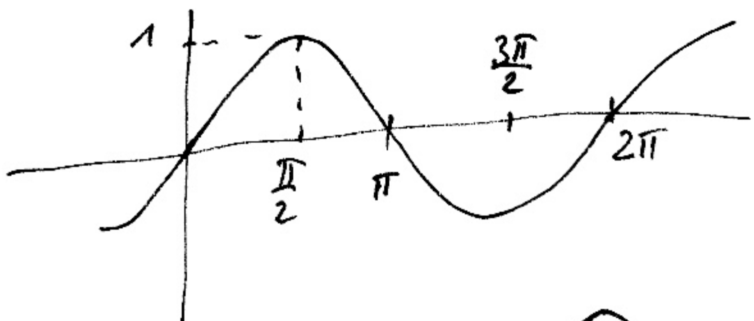
$\log_2 x = \operatorname{ld} x$ „Zweierlog." $\rightarrow$ Informatik

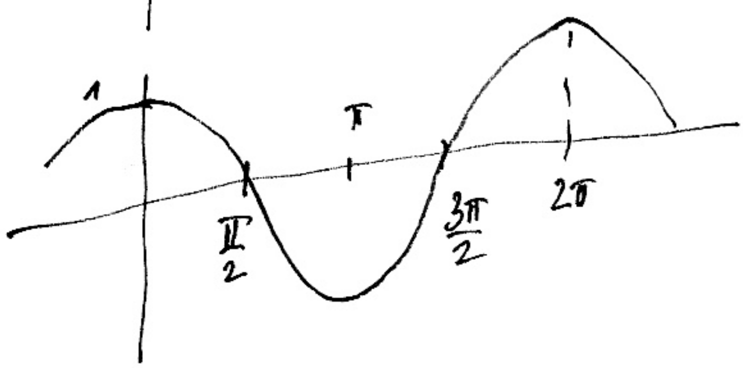
(f) Trigonometrische Funktionen



Winkel im Bogenmaß: $\frac{\pi}{2} \hat{=} 90^\circ$ etc.

Pythagoras $\Rightarrow$ $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$ (2.8)





Wichtige Additionstheoreme:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \end{aligned}} \quad (2.9)$$

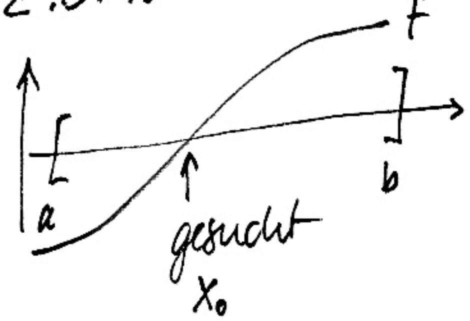
(Säckeweise mehr im Bronstein)

2.1 Reelle Zahlenfolgen

Folgen sind das wichtigste Arbeitsgerät der Analysis!

Aber sie treten auch in der Ing.-Praxis auf!!

z.B. bei Nullstellensuche:



Einfachster Algorithmus: Bisektionsverfahren (Löwenfangen in der Wüste)

Wüste: $[a, b]$; setze $a_0 := a$; $b_0 := b$

Halbiere Wüste: $x := \frac{a_0 + b_0}{2}$

Löwe ist in $[a_0, x] \longrightarrow a_1 := a_0;\ b_1 := x$

Löwe ist in $[x, b_0] \longrightarrow a_1 := x;\ b_1 := b_0$

Halbiere Wüste: $x := \frac{a_1 + b_1}{2}$

usw.

Resultat sind 2 Folgen: (a_n) und (b_n).

Wir erwarten Konvergenz: $a_n \xrightarrow{n \to \infty}$ Löwe

$b_n \xrightarrow{n \to \infty}$ Löwe

Was ist eine Folge? Was ist Konvergenz?

Eine Folge ist eine Funktion (Abbildung)

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto a_n \in \mathbb{R}$$

Man schreibt $(a_n) \subset \mathbb{R}$ oder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n\geq 0}$ etc.

Es gibt auch rekursiv definierte ~~Funktionen~~ Folgen:

Karnickel-Sex (Fibonacci 13. Jhdt)

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

ist rekursiv def. durch

$$a_0 := 1 \; ; \; a_1 := 1 \; ; \; a_{n+1} := a_n + a_{n-1} \, , \; n \geq 1 .$$

Definition 2.1: Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt konvergent mit Grenzwert (Limes) $a \in \mathbb{R}$, wenn „$\lim_{n\to\infty} a_n = a$", d.h.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon .} \tag{2.1.1}$$

Eine nicht-konvergente Folge heißt divergent.

Bspl: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_+$.

Wegen $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$ vermuten wir: $a = 1$.

$$|a_n - a| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n-(n+1)}{n+1} \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right|$$

$$= \frac{1}{n+1} \overset{?}{<} \varepsilon \, ; \quad n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \, , \; n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Also: Für $\varepsilon > 0$ wähle $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$, dann ist $|a_n - a| < \varepsilon$.

[Mit der Gauß-Klammer $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ kann man auch

$$n = \lfloor \tfrac{1}{\varepsilon} - 1 \rfloor + 1 = N$$

schreiben. Mit der Aufrundungsfunktion

$$\lceil x \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\}$$

kann man

$$n = \lceil \tfrac{1}{\varepsilon} - 1 \rceil = N$$

schreiben.]

Problem mit Def. 2.1: wir müssen den Grenzwert schon kennen (oder raten können).

Idee: Die Folgenglieder einer konvergenten Folge sollten sich nahe dem Grenzwert nur wenig voneinander unterscheiden.

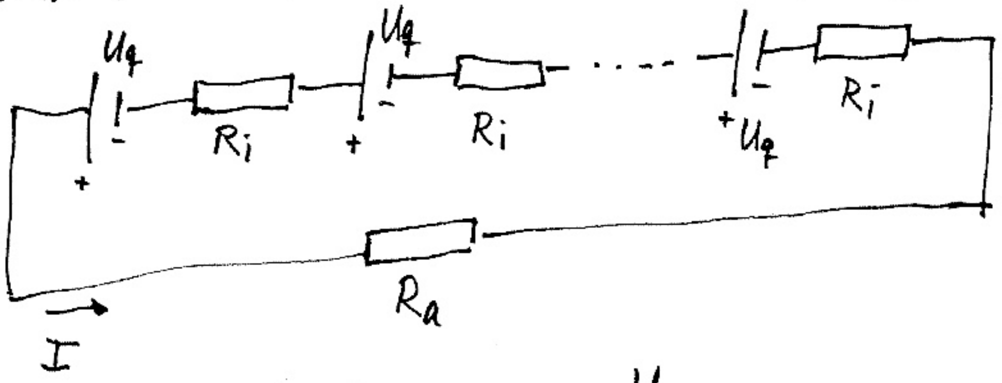
(Definition 2.2: Eine Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge, wenn: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq N: |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Satz 2.3: (i) (a_n) konvergent $\Rightarrow$ (a_n) Cauchy-Folge

(ii) (a_n) Cauchy-Folge $\Rightarrow$ (a_n) konvergent

A2 (Folgen, elementar)

Reihenschaltung aus n gleichen Spannungsquellen und einem Verbraucher (Widerstand) R_a.



Konstante Quellenspannung U_q.

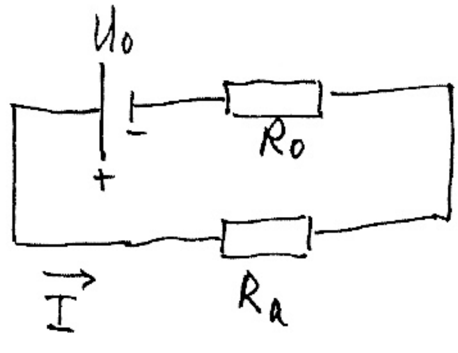
→ Ersetze die n Spannungsquellen durch eine Ersatzspannungsquelle mit Spannung

$$U_0 := n \cdot U_q,$$

Ersatz-Innenwiderstand entsprechend:

$$R_0 := n \cdot R_i .$$

⇒



Kirchhoff'sche Regeln (Reihenschaltung) ⇒

Gesamtwiderstand $R_g = R_0 + R_a = nR_i + R_a$.

A8

Ohm'sches Gesetz $\Rightarrow$

$$I = I(n) = \frac{U_0}{R_g} = \frac{n \cdot U_q}{nR_i + R_a}$$

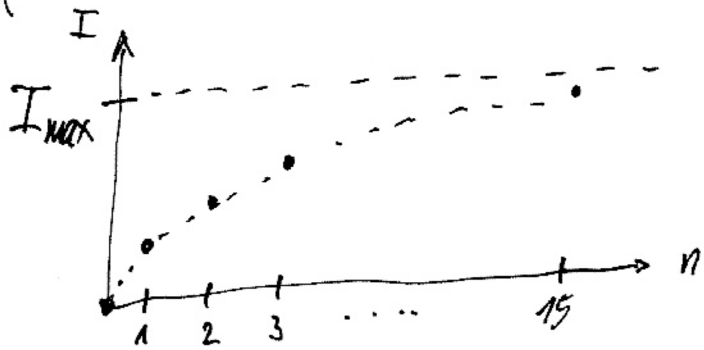
$(I(n))$ ist eine Folge! Grenzwert für $n \to \infty$?

$$I(n) = \frac{n \cdot U_q}{nR_i + R_a} = \frac{U_q}{R_i + \underbrace{\frac{R_a}{n}}_{\text{Nullfolge}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{U_q}{R_i}$$

Der Grenzwert

$$I_{max} := \lim_{n\to\infty} I(n) = \frac{U_q}{R_i}$$

heißt <u>Kurzschlussstrom</u>



Überprüfen mit Definition (2.1) des Grenzwerts:

$$|I(n) - I_{max}| = \left|\frac{nU_q}{nR_i + R_a} - \frac{U_q}{R_i}\right| = \left|\frac{nR_iU_q - U_q(nR_i + R_a)}{nR_i^2 + R_aR_i}\right|$$

$$= \left|\frac{-U_qR_a}{nR_i^2 + R_aR_i}\right| = \frac{U_qR_a}{nR_i^2 + R_aR_i} \overset{!}{<} \varepsilon$$

$$\Rightarrow U_qR_a < \varepsilon(nR_i^2 + R_aR_i) \Rightarrow nR_i^2 > \frac{U_qR_a}{\varepsilon} - R_aR_i$$

$$\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}\frac{U_qR_a}{R_i^2} - \frac{R_a}{R_i}$$; Wähle so ein $N \in \mathbb{N}$!